

## 2.4 シンプレックス法における 更新手続きの数学的根拠

本節では、シンプレックス法の計算手順のなかの停止条件と、ピボット操作・基底行列の更新の数学的根拠について考えてみる。

線形計画問題の標準形 (2.1) において、連立 1 次方程式  $Ax = b$  の  $(m \times n)$  の係数行列  $A$  が  $\text{rank} A = m$  かつ  $m < n$  をみたしているとする。このとき、基底変数  $x_B$  と非基底変数  $x_N$  が選ばれ、それに対応して係数行列  $A$  が (2.5) のように、基底行列  $B$  と非基底行列  $N$  に分割されているとする。また、同様に目的関数の係数ベクトル  $c$  の分割を、それぞれ  $c_B$  と  $c_N$  とする。つまり、

$$A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$$

となっているとする。

このとき、シンプレックス法の「停止条件の判定」と「ピボット操作」および「基底行列の更新」は以下のものであった。

### 考え方：停止条件とピボット操作および基底行列の更新 (再掲)

**停止条件** 判定項  $c_N^T - c_B^T B^{-1}N$  のすべての成分が 0 以上ならば停止。

**ピボット操作・基底行列の更新** 停止しない場合、実行可能集合における現在の端点から目的関数値を減少させる方向をみつけて隣接する端点に移動することを考える。つまり、非基底行列を構成する列ベクトルのなかから 1 つを選び、直前の基底行列のある列ベクトルと交換して新しい基底行列を構成する。具体的には、基底変数  $x_B$  と非基底変数  $x_N$  のあいだで変数の交換が行われて、基底変数と基底行列が更新される。まず、非基底行列の列ベクトルのなかで判定項の負の成分に対応するものに着目する。

- その列ベクトルの成分の値がすべて 0 以下の場合 (ピボットなし)

制約条件をみたしたまま目的関数値がいくらでも小さくなるので、下に非有界となり最適解は存在しない (値は  $-\infty$  に近づく)。

- その列ベクトルの成分のなかで正の値がある場合 (ピボットの更新)

正の値が1か所しかなければ、そこがピボットの位置。複数ある場合は、それぞれの**正の値**で右辺の値を割る。(右端にメモを残して、) 割った結果、値が一番小さいところを丸(○)で囲み、その列ベクトルのその行のところがピボットの位置となるので、○で囲む。

### (1) 停止条件について

$\mathbf{x}$  が実行可能解ならば、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  をみだし、現在の基底行列と非基底行列の分割により、(2.6) のようになっている。ここで、基底行列  $B$  は正則で逆行列をもつので、

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{x}_N$$

と変形され、目的関数  $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$  を分割表示して、 $\mathbf{x}_B$  のところへ  $B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{x}_N$  を代入すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T(B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^TB^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - N^T(B^{-1})^T\mathbf{c}_B)^T\mathbf{x}_N\end{aligned}\quad (2.15)$$

となる。このとき、実行可能解  $\mathbf{x}$  は非負条件  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  をみたしているのので、 $\mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$  でもある。よって、 $\mathbf{c}_N - N^T(B^{-1})^T\mathbf{c}_B \geq \mathbf{0}$  ならば、(2.2) により、

$$(\mathbf{c}_N - N^T(B^{-1})^T\mathbf{c}_B)^T\mathbf{x}_N \geq 0$$

となり、(2.15) の右辺をより小さくして、

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{c}_B^TB^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_N \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } \hat{\mathbf{x}}_B = B^{-1}\mathbf{b}$$

とでき、基底行列  $B$  に対応する実行可能基底解として  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_B \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$  が得られる。

ここで  $\hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$  である。 $\mathbf{x}$  が任意の実行可能解なので、 $\hat{\mathbf{x}}$  が (2.1) の最適解となり、そのときの目的関数値  $\mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c}_B^TB^{-1}\mathbf{b}$  が最適値 (最小値) となる。しかし、 $\hat{\mathbf{x}}$  がすぐにみつかるとは限らない。そこで、何らかの方法で実行可能基底解を1つみつけ、基底変数を1つずつ入れ替えることで目的関数値を次第に小さくする方法 (アルゴリズム) を考える。この繰り返しのなかで、条件  $\mathbf{c}_N - N^T(B^{-1})^T\mathbf{c}_B \geq \mathbf{0}$  (行ベクトル表示では  $\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^TB^{-1}N \geq \mathbf{0}^T$ ) がみたされるかもしれない。このとき、 $\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^TB^{-1}N$  の各成分が判定項となり、そのすべての値が非負

(0 以上) となれば、アルゴリズムは停止する。もし、停止条件がみたされない場合は、非基底行列の列ベクトルのなかから新たに基底行列に加わる列を探して、基底行列の更新が行われる。この操作は、49 ページの【判定項の構成】と同じであることがわかる。

では、具体例として、51 ページの例 2.7 をもう一度取り上げよう。変形の様子を対比できるように左右に並べてみる。左側に実際の係数を入れた表、右側には基底行列・非基底行列、およびそれらに対応した目的関数の係数を行列やベクトルの式で表したものを並べてある。例えば、最初の行は  $(-1 \ -1) = \mathbf{c}_N^T$  と  $(0 \ 0) = \mathbf{c}_B^T$  となっている。

|                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{ccc c} \boxed{-1} & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ \hline \textcircled{3} & 2 & \boxed{1} & \boxed{0} & 12 \\ 1 & 2 & \boxed{0} & \boxed{1} & 8 \end{array}$ | $\begin{array}{cc c} \boxed{\mathbf{c}_N^T} & \boxed{\mathbf{c}_B^T} & 0 \\ \hline \boxed{N} & \boxed{B} & \boxed{\mathbf{b}} \end{array}$                                                                                                                                             |
| $\begin{array}{ccc c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \textcircled{3} & 2 & \boxed{1} & \boxed{0} & 12 \\ 1 & 2 & \boxed{0} & \boxed{1} & 8 \end{array}$                 | $\begin{array}{ccc c} \boxed{\mathbf{c}_{B'}^T \text{ の左側}} & \boxed{\mathbf{c}_N^T} & \boxed{\mathbf{c}_{B'}^T \text{ の右側}} & 0 \\ \hline \boxed{B' \text{ の左側}} & \boxed{N'} & \boxed{B' \text{ の右側}} & \boxed{\mathbf{b}} \end{array}$                                              |
| $\begin{array}{ccc c} 0 & \boxed{-1/3} & \boxed{1/3} & 0 \\ \hline \boxed{1} & 2/3 & 1/3 & \boxed{0} & 4 \\ 0 & \boxed{4/3} & -1/3 & \boxed{1} & 4 \end{array}$    | $\begin{array}{ccc c} 0 & \boxed{\mathbf{c}_N'^T - \mathbf{c}_{B'}^T B'^{-1} N'} & 0 & -\mathbf{c}_{B'}^T B'^{-1} \mathbf{b} \\ \hline \boxed{1} & \boxed{B'^{-1} N'} & \boxed{0} & \boxed{B'^{-1} \mathbf{b}} \\ 0 & & \boxed{1} & \end{array}$                                       |
| $\begin{array}{ccc c} 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ \hline \boxed{1} & \boxed{2/3} & 1/3 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{4/3} & -1/3 & 1 & 4 \end{array}$                            | $\begin{array}{cc c} \boxed{\mathbf{c}_{B''}^T} & \boxed{\mathbf{c}_N'^T} & d \\ \hline \boxed{B''} & \boxed{N''} & \boxed{\mathbf{b}'} \end{array} \left( \begin{array}{l} \text{ただし,} \\ \mathbf{b}' = B'^{-1} \mathbf{b} \\ d = -\mathbf{c}_{B'}^T \mathbf{b}' \end{array} \right)$ |
| $\begin{array}{ccc c} 0 & 0 & \boxed{1/4} & \boxed{1/4} \\ \hline \boxed{1} & \boxed{0} & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1/4 & 3/4 & 3 \end{array}$            | $\begin{array}{ccc c} 0 & 0 & \boxed{\mathbf{c}_N''^T - \mathbf{c}_{B''}^T B''^{-1} N''} & d - \mathbf{c}_{B''}^T B''^{-1} \mathbf{b}' \\ \hline \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{B''^{-1} N''} & \boxed{B''^{-1} \mathbf{b}'} \\ 0 & \boxed{1} & & \end{array}$                         |

各反復の判定項は  $\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1} N$  の形をしていて、目的関数の

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N$$

の部分は

$$\mathbf{0}^T \mathbf{x}_B + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1} N) \mathbf{x}_N + \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b}$$

と変形され、定数項  $\mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b}$  の部分は右辺へ移項された形で出現していることがわかる。つまり、反復を繰り返すと  $\mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b}$  の形の定数項が右辺に  $(-1)$  倍されて積み上げられてゆく。その結果、停止条件がみたされた際の表の右上にでてくる値の符号を反転させた値が最適値を表していることになる。

## (2) ピボット・基底行列の更新について

停止条件がみたされないときは、判定項に負の成分があることになる。その成分を判定項の  $k$  番目とすると、 $\mathbf{c}_N^T$  の  $k$  番目から  $\mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{N}$  の  $k$  番目を引いた形となっていて、 $c_k - \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_k$  のように表すことができる。ここで、 $c_k$  は  $\mathbf{c}_N^T$  の  $k$  番目の成分、 $\mathbf{a}_k$  は  $N$  の  $k$  番目の列ベクトルとなっている。また、 $k$  番目のみ1で残りは0のベクトルを  $\mathbf{e}_k$  と表して、

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -B^{-1} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix}, \quad \text{ただし, } \mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0)^T \quad (2.16)$$

とおくと、 $\mathbf{c}_N^T \mathbf{e}_k = c_k$  なので、

$$c_k - \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_k < 0 \iff \begin{pmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_N \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -B^{-1} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix} < 0 \iff \mathbf{c}^T \mathbf{d} < 0 \quad (2.17)$$

となり、現在の実行可能基底解  $\hat{\mathbf{x}}$  と、そこから  $\mathbf{d}$  方向に移動した点 ( $t > 0$  としてベクトル  $\mathbf{d}$  を  $t$  倍した  $t\mathbf{d}$  だけ移動した点)  $\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}$  に対して以下が成り立つ。

- 目的関数値は減少する：任意の  $t > 0$  に対して、(2.17) より

$$\mathbf{c}^T (\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}) = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{c}^T \mathbf{d} < \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$$

となり、 $t$  の値が大きければ大きいほど目的関数値は減少する。つまり、 $\hat{\mathbf{x}}$  から  $\mathbf{d}$  方向にできるだけ進んだほうが目的関数値は減少する。

- 連立1次方程式の制約はみたされる：任意の  $t > 0$  に対して、(2.16) より

$$\begin{aligned} A(\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}) &= A\hat{\mathbf{x}} + tA\mathbf{d} = \mathbf{b} + t \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B^{-1} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{b} + t(-BB^{-1} \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k) = \mathbf{b} + t(-\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k) = \mathbf{b} \end{aligned}$$

となり、 $t$  の値によらず  $A(\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}) = \mathbf{b}$  が成立する。つまり、 $\hat{\mathbf{x}}$  から  $\mathbf{d}$  方向にどれだけ進んでも等式制約はみたされている。

- 変数の非負条件がみたされる：任意の  $t > 0$  に対して、(2.16) より

$$\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}}_B \\ \widehat{\mathbf{x}}_N \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -B^{-1} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -B^{-1} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B^{-1}\mathbf{b} - tB^{-1}\mathbf{a}_k \\ te_k \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

が成り立っているので、 $te_k \geq \mathbf{0}$  により、非負条件については、

$$\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{d} \geq \mathbf{0} \iff B^{-1}\mathbf{b} - tB^{-1}\mathbf{a}_k \geq \mathbf{0} \iff tB^{-1}\mathbf{a}_k \leq B^{-1}\mathbf{b} \quad (2.19)$$

となり、(2.19) の最後の不等式を確認すればよいことがわかる。

その式の右辺は、判定項をみる際の連立 1 次方程式の右辺を表していて、 $\hat{\mathbf{x}}_B \geq \mathbf{0}$  より  $B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  となり、列ベクトル  $B^{-1}\mathbf{a}_k$  の成分が 0 以下の値のところは自動的に成立している。しかし、正の値のところは、 $t$  を大きくするといつかは右辺の値を追い越してしまい、不等式は不成立となる。そこで、正の値が複数あった場合には、(2.19) の最後の不等式がぎりぎり成立するようになるべく大きな値  $t_0$  を選ぶことを考える。このとき、不等式の左辺と右辺を

$$tB^{-1}\mathbf{a}_k = t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおくと、 $t_0$  は以下の式で与えられる。

$$t_0 = \min \left\{ \frac{b_i}{y_i} \mid y_i > 0 \right\}$$

なぜなら、最小値を与える場所が  $y_j$  だったとすると、 $t_0 = b_j/y_j$  となり、 $\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}$ 、つまり、(2.18) の  $B^{-1}\mathbf{b} - tB^{-1}\mathbf{a}_k$  の  $j$  行目のところが、

$$b_j - t_0 y_j = b_j - \left( \frac{b_j}{y_j} \right) y_j = 0$$

となり、 $x_j$  が基底変数から抜ける。一方、 $\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}$  の  $k$  番目の成分が  $t_0 > 0$  となっているので、非基底変数  $x_N$  の  $k$  番目の成分が 0 から  $t_0$  へ変化して、新たに  $x_k$  が基底変数に加わることがわかる。もちろん、 $x_j$  以外の基底変数  $x_i$  の値は、(2.18) から直前の値である  $b_i$  から  $b_i - t_0 y_i$  へ変化するが、

$$x_i = \begin{cases} b_i - t_0 y_i \geq b_i - \left( \frac{b_i}{y_i} \right) y_i = 0 & (y_i > 0 \text{ のとき}), \\ b_i - t_0 y_i \geq 0 & (y_i \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることから非負条件はみたされ、基底変数として残ることができる。

なお、列ベクトル  $B^{-1}\mathbf{a}_k$  のすべての成分が0以下となる場合には、(2.19)の最後の不等式が常に成立するので、どのような  $t > 0$  を選んでも非負条件  $\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$  をみたしたまま  $A(\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}) = \mathbf{b}$  も成立して、 $\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}$  は実行可能解となる。また、最初に述べたように、 $t$  の値に比例して目的関数の値も減少し続ける。よって、最小値をとることはなく(下に非有界)、最適解は存在しない。

## 2.4 節の問題

[1] 次の線形計画問題をシンプレックス法を利用して求める過程で、判定項のなかで負の値をとる列を考え、その列ベクトルには正の成分がないことを示そう。この場合は、下に非有界で最適解は存在しない。

$$(\text{LP}) \quad \begin{cases} \text{Min} & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

[2] ある工場で3種類の製品A, B, Cを生産している。製品Aを1kg生産するには、原料が1トン、水が2m<sup>3</sup>、電力が2kWh必要であり、製品Bを1kg生産するには、原料が1トン、電力が1kWh必要であり、製品Cを1kg生産するには、原料が2トン、水が2m<sup>3</sup>、電力が3kWh必要である。1日の原料、水、電力の使用可能量は、それぞれ4トン、9m<sup>3</sup>、7kWhである。また、製品A, B, Cの1kgあたりの利益はそれぞれ3万円、2万円、4万円とすると、利益を最大にするには、A, B, Cをどのように生産すればよいかを求める問題を考える。

製品A, B, Cをそれぞれ、 $x_1$  kg,  $x_2$  kg,  $x_3$  kg生産するものとして線形計画問題に定式化し、シンプレックス法のアルゴリズムを利用してこの問題の最適解と最適値を求めよ。

## 2.5 端点および端方向と実行可能基底解の関係

定理2.1で線形計画問題(2.1)の実行可能集合が凸多面体であるときに、その端点で最適値をとることを証明した。それでは、実行可能集合が非有界のときはどうか。まず、実行可能集合の幾何学的性質から考えてみよう。

凸集合の任意個の共通部分は凸集合となる。特に、超平面は凸集合である。ここで、連立1次方程式の解集合は有限個の超平面の共通部分だったので、連立1次方程式の解集合は凸集合となる。また、それは空集合や1点集合の場合もあり